



TITLE:

# Affine環の部分環について

AUTHOR(S):

小野田, 信春

---

CITATION:

小野田, 信春. Affine環の部分環について. 代数幾何学シンポジウム記録 1981, 1981: 108-119

ISSUE DATE:

1981

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/212605>

RIGHT:

## Affine 環の部分環について

阪大 理 小野田 信春

以下では、体  $k$  上の Affine 環、即ち、体  $k$  上有限生成整域  $A$  の部分環  $R$  で、 $k$  を含むものを考察の対象とする。このような環の中には例えば、必ずしも完備でない代数多様体  $X$  の正則関数環  $k[X]$  や、Affine 環  $A$  に群  $G$  が作用している場合の不変部分環  $A^G$  等、重要なものが含まれるので、このような環について調べておくことは意味のあることと思われる。これについては、考えるべき問題として、次の2つが挙げられると思う。

(1) どのような条件のもとで、 $R$  は再び  $k$  上の Affine 環になるか。

(2)  $R$  はどのような (Affine 環と類似の) 性

質をもつか。

ここでは主として、(1)の問題について考えてみた。そのために、まず、 $R$  のイデアル  $\mathcal{A}(R)$  を次のようにして定義する。

命題 1 体  $k$  上の affine 環  $A$  の部分環  $R$  に対して、

$$\mathcal{A}(R) = \{a \in R; R_a \text{ は } k \text{ 上の affine 環}\} \cup \{0\}$$

と定義すると、 $\mathcal{A}(R)$  は  $R$  の (0) でないイデアルである。但し、ここで、 $R_a = R[\frac{1}{a}]$ 。

証明  $A$  は  $R$  上代数的であると仮定しよう。実際、そうでないときは、 $P \cap R = (0)$  となる  $A$  の素イデアル  $P$  のうち、包含関係について極大なものをとり、 $A$  を  $A/P$  で置き換えればよい。そこで、 $A = k[x_1, \dots, x_n]$  とし、

$$f_i(x) = a_{i0}x^{m_i} + a_{i1}x^{m_i-1} + \dots + a_{im_i} \quad a_{ij} \in R$$

を、 $x_i$  を根にもつ  $R$  上の  $m_i$  項式とする。 $B = k[\{a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m_i\}]$  とし、 $a = a_{10} \dots a_{n0}$  とおくと、 $B_a \subseteq R_a \subseteq A_a$  かつ、容易にわかるよ

うに、 $A_a$  は  $B_a$  の整拡大である。一方、 $A_a$  は  $B_a$  上有限生成ゆえ、 $A_a$  は  $B_a$ -加群として有限生成となる。従って中間環  $R_a$  も有限生成  $B_a$ -加群であり、 $B_a$  が Affine 環ゆえ  $R_a$  も Affine 環となることがわかる。よって、 $a \in \mathcal{A}(R)$  を得、 $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$  が示された。 $\mathcal{A}(R)$  がイデアルとなることの証明は省略する。

次の補題を述べる前に、ことばを一つ定義する。一般に、局所環  $S$  が体  $k$  上の局所域であるとは、 $k$  上のある Affine 環  $B$  および  $B$  の素イデアル  $P$  があって、 $S = B_P$  となることという。

**補題 2** 体  $k$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  と、 $R$  の素イデアル  $\mathfrak{f}$  に対し、 $R_{\mathfrak{f}}$  が  $k$  上の局所域であるための必要十分条件は、 $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$  となることである。

**証明** 充分性は明らかゆえ、必要性だけを

示す。  $R_f$  が局所域になつたとすると、定義より、ある Affine 環  $B$  と、  $B$  の素イデアル  $P$  とがあつて、  $R_f = B_P$  となる。ここで、  $B \subseteq R$  と仮定してもよい。  $B'$  および  $R'$  をそれぞれ  $B$  および  $R$  の整包閉とする。  $f'$  を  $f$  の上にある  $R'$  の素イデアルとし、  $P' = f' \cap B'$  とおく。すると容易にわかるように、  $R'_{f'} = B'_{P'}$  となる。そこで、

$$F = \{ Q \in \text{Spec } B' ; \text{ ht } Q = 1 \text{ かつ } B'_Q \not\subseteq R' \}$$

とおく。このとき、  $F$  は有限集合である。実際、  $0 \neq a \in A(R)$  なる  $a$  をひとつ選ぶと、  $R_a$  は Affine 環ゆえ、その整包閉  $R'_a$  も再び Affine 環である。従つて  $R'_a$  は  $B'$  上有限生成であり、かつ  $R'_a$  と  $B'$  は同じ商体をもつかう、ある  $0 \neq b \in B'$  に対し、  $B'_b \supseteq R'_a \supseteq R'$  となる。このとき、容易にわかるように、  $F$  は  $b$  の極小素因子全体が作る集合の部分集合になる。よつて  $F$  は有限集合である。そこで、  $F = \{ P'_1, \dots, P'_n \}$  とし、  $P_i = P'_i \cap B$  とおく。ここで、  $P_i \subseteq P$  と仮定すると、  $B'_{P'_i} \supseteq B'_P = R'_f \supseteq R'$  となり  $F$  の定

義に矛盾する。よって、 $P_1 \cap \cdots \cap P_n \neq P$  を得る。そこで、 $x \in P_1 \cap \cdots \cap P_n \setminus P$  とし、

$$\Lambda = \{Q \in \text{Spec } B' ; \text{ 既 } Q = 1 \text{ かつ } x \notin Q\}$$

とおく。すると、 $x$  の取り方より、任意の  $\Lambda$  の元  $Q$  に対し  $B'_Q \supseteq R'$  となるから、 $B'_x = \bigcap_{Q \in \Lambda} B'_Q \supseteq R'$  を得る。従って、 $B'_x = R'_x$  となり、 $R'_x$  は  $k$  上の Affine 環であることがわかる。ところが、 $R'_x$  は  $R_x$  の整閉包ゆえ、よく知られているように、このとき  $R_x$  も Affine 環になる。 $x \in B \setminus P \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$  ゆえ、従って、 $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$  が示せた。

命題 1 と補題 2 より次の定理を得る。

定理 3 体  $k$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  が  $k$  上の Affine 環であるための必要充分条件は、任意の  $R$  の極大イデアル  $m$  に対し  $R_m$  が  $k$  上の局所域になることである。

次の定理は、局所域であるための1つの条件を与えている。

定理4 体  $k$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  に対し、 $\text{tr. deg}_k R = d$  とする。 $R$  の整閉包  $R'$ 、および  $R'$  の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対し、 $\text{ht } \mathfrak{m} = d$  かつ  $R$  が Noether 環ならば、 $R'_{\mathfrak{m}}$  は  $k$  上の局所域である。

証明  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap R$  とおくと、 $R$  は Noether 環ゆえ、 $\mathfrak{m}$  は有限生成である。そこで、 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_t)R$  とする。 $k$  上の Affine 環  $B$  を、 $B$  と  $R$  は双有理かつ、 $x_1, \dots, x_t \in B$  となるように選ぶ。 $M = \mathfrak{m} \cap B$  とおく。 $x_1, \dots, x_t \in M$  ゆえ、 $MR = \mathfrak{m}$  である。また、 $\text{ht } \mathfrak{m} = d$  ゆえ、 $\text{tr. deg}_k B/M \leq \text{tr. deg}_k R'/\mathfrak{m} = 0$ 、つまり、 $B/M$  は  $k$  上代数的となり、従って、 $k$  が体ゆえ  $B/M$  も体、即ち、 $M$  は  $B$  の極大イデアルであることがわかる。 $B'$  を  $B$  の整閉包とし、 $\bar{R} = R[B']$  とおく。 $B$  は Affine 環ゆえ、 $B'$  は有限生成  $B$  -

加群、従って、 $\bar{R}$  は有限生成  $R$ -加群である。  
 特に、 $R$  が Noether 環ゆえ  $\bar{R}$  も Noether 環である。 $\pi$   
 $= \pi \cap \bar{R}$ 、および、 $M' = \pi \cap B'$  とおく。 $R'$  は  
 $\bar{R}$  上整ゆえ、 $\text{ht } \pi \geq \text{ht } m = d$  となり、従って  
 $\text{ht } \pi = d$  を得る。一方  $B'$  は  $B$  上整かつ、 $M'$  は  
 $B$  の極大イデアル  $M$  上の素イデアルゆえ、 $M'$   
 は  $B'$  の極大イデアルである。 $B'$  は  $k$  上の Affine  
 環ゆえ、従って、 $\text{ht } M' = d$  となる。よって、  
 局所環の拡大、 $B'_{M'} < \bar{R}_\pi$  に対し、 $\dim B'_{M'} =$   
 $\dim \bar{R}_\pi$  を示せた。次に、 $M' \bar{R}_\pi \supseteq M \bar{R}_\pi = m \bar{R}_\pi$   
 かつ  $m \bar{R}_\pi$  は  $\pi \bar{R}_\pi$ -準素イデアルであることよ  
 り、ある正整数  $r$  に対し、 $\pi^r \bar{R}_\pi \subseteq m \bar{R}_\pi \subseteq$   
 $M' \bar{R}_\pi$  となることに注意する。 $k' = B'/M'$ 、 $L =$   
 $\bar{R}/\pi$  とおくと、

$$\text{length}_{k'} \bar{R}_\pi / M' \bar{R}_\pi \leq (\text{length}_{k'} L) (\text{length}_{\bar{R}} \bar{R} / \pi^r)$$

ここで、 $\text{ht } \pi = d$  ゆえ、 $\text{tr. deg}_k \bar{R} / \pi = 0$  となり  
 従って、[4] の Theorem 2 により、 $L$  は  $k$  上のあ  
 る Affine 環の部分体となる。よって、 $L$  は  $k$  の  
 有限次代数拡大体であり、特に、 $\text{length}_{k'} L$  は有  
 限である。また、 $\bar{R}$  は Noether 環ゆえ、よく知ら



れをいさうに、 $\text{length}_R \bar{R}/\pi^r$  は有限。従って、  
 $\text{length}_R \bar{R}\pi/M'\bar{R}\pi$  が有限であることがわかった。  
 更に、 $B'$  は正規 Affine 環ゆえ、局所環  $B'_M$  は解  
 析的正規環であり、また、明らかに  $B'_M$  と  
 $\bar{R}\pi$  とは同じ商体をもつ。故に Zariski の主定理  
 ([3, Theorem (37.4)]) により、 $B'_M = \bar{R}\pi$  を得る。  
 特に、 $\bar{R}\pi$  は整閉整域であり、従って、 $\bar{R}\pi$   
 $= R'\pi$  となる。よって  $R'\pi$  は局所環であり、  
 このことから、 $R'\pi = R'\pi$  即ち、 $R'\pi = B'_M$  を  
 得る。故に  $R'\pi$  は局所域である。

定理 3 と定理 4 より次を得る。

定理 5 体  $K$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  に対  
 し、 $R$  が Noether 環かつ  $R$  の整閉包  $R'$  が等次元、  
 即ち  $R'$  の任意の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対し、 $\text{ht } \mathfrak{m}$   
 $= \text{tr. deg}_K R'$  とするならば、 $R$  は  $K$  上の Affine 環で  
 ある。

定理 5 の応用を述べる前に、ideal transform の定義を思い出しておく。一般に、環  $B$  と、 $B$  のイデアル  $I$  に対し、 $Q(B)$  で  $B$  の全商環を表わすとして

$$T(I, B) = \{x \in Q(B); xI^n \subseteq B \text{ for some } n \geq 0\}$$

と定義し、これを  $B$  の  $I$ -transform と呼ぶ。この ideal transform は、幾何学的には、Affine 多様体の開集合の正則関数環を与えるものとして重要な意味を持ち、ヒルベルトの 14 問題等との関連から、ideal transform がいつ Affine 環になるかということを考えるのは極めて意義のあることと思われる。

そこでまず、ideal transform の特徴付けを 1 つ与えておく。

命題 6 体  $k$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  に対し、 $R$  が Krull 環かつ  $\text{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = \text{tr.deg}_k R - 1$  が任意の高さ 1 の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対し 2 成り立つならば、ある正規 Affine 環  $B$  と  $B$  のイデアル  $I$  が存在して、 $R = T(I, B)$  とかける。

証明  $d = \text{ht. deg}_k R$  とし、 $f \in R$  と  $fg = 1$  なる  
 任意の  $R$  の素イデアルとする。仮定より、  
 $\text{ht. deg}_k R/f = d-1$  中え、 $x_2, \dots, x_d \in R$  を、  
 $x_2 \pmod{f}, \dots, x_d \pmod{f}$  が  $k$  上代数的独立であ  
 るように選べる。  $S = k[x_2, \dots, x_d] \setminus \{0\}$ 、 $L =$   
 $k(x_2, \dots, x_d)$  とおくと、 $S^{-1}R$  は体  $L$  上の Affine 環  
 $S^{-1}A$  の部分環かつ、 $\text{ht. deg}_L S^{-1}R = 1$  である。従  
 ってよく知られたように (例えば [4] 参照)  
 $S^{-1}R$  は  $L$  上の Affine 環である。よって、 $R_f =$   
 $(S^{-1}R)_{S^{-1}f}$  は  $L$  上の、従って  $k$  上の局所域となる。  
 そこで、 $0 \neq a \in \mathcal{A}(R)$  なる元  $a$  をとり、 $a$  の素  
 因子の全体を、 $p_1, \dots, p_n$  とすれば、上に述べた  
 ことより、 $R_{p_i}$  は  $k$  上の局所域中え、ある  $k$   
 上の Affine 環  $C_i = k[x_{i1}, \dots, x_{im_i}] \subseteq R$  と、 $p_i \in \text{Spec } C_i$   
 があって、 $R_{p_i} = C_{ip_i}$  となる。また、 $a \in \mathcal{A}(R)$   
 中え、ある  $x_1, \dots, x_m \in R$  があって、 $R_a = k[\frac{1}{a},$   
 $x_1, \dots, x_m]$  となる。  $C = k[a, x_1, \dots, x_m, x_{11}, \dots, x_{nm_n}]$  と  
 おき、 $B$  を  $C$  の整閉包とすれば、 $B$  は  $k$  上の  
 整規 Affine 環かつ、作り方から、 $p_i = p_i \cap B$  に  
 対して、 $B_{p_i} = R_{p_i}$  および、 $B_a = R_a$  となる。従

って、 $a$  の  $B$  における素因子全体を、 $P_1, \dots, P_m$ ,  $P_{m+1}, \dots, P_\ell$  とし、 $I = P_{m+1} \cap \dots \cap P_\ell$  とおけば、容易にわかるように、 $R = T(I, B)$  を得る。

最後に、定理 5 の応用として、2 次元 ideal transform が Affine 環になるための条件を次の形で与えておく ([1], [2] 参照)

命題 7 体  $k$  上の Affine 環  $A$  の部分環  $R$  に対し、 $R$  が、 $\text{ht. deg}_k R = 2$  なる Krull 環であって、任意の高さ 1 の素イデアル  $\mathfrak{f}$  に対して、 $\text{ht. deg}_k R/\mathfrak{f} = 1$  となるならば、 $R$  は  $k$  上の Affine 環である。

証明 条件より、 $R$  が Noether 環かつ等次元であることが導けるので、定理 5 より主張を得る。

定理 5 により、Affine 環の部分環について Affine 性は、ほぼ等次元性として捉えることが

できる。そこで最初に挙げた具体的な例、たとえば、代数多様体  $X$  の正則関数環  $k[X]$  や、Affine 環  $A$  に群  $G$  が作用している場合の不変部分環  $A^G$  等に対して、それらがいっ等次元になるかということや、 $X$  の幾何的な条件や群  $G$  の条件から考えてみるという問題意識は、何らかの面白い結果をもたらすものと期待できる。

### 参 考 文 献

- [1] P. Eakin, A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 75-80.
- [2] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Lectures on Math. and Physics, Vol. 31, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1965.
- [3] M. Nagata, Local rings
- [4] A. R. Wadsworth, Hilbert subalgebras of finitely generated algebras, J. Algebra 43 (1976), 298-304.